Unabhängiger und abhängiger t-Test

Seminar Evaluation und Forschungsstrategien, 14.11.19

Katharina Hoffers, Purya Safdari, Julia Schaub, Leonie Schmidt

„Sind die Patienten nach einer Therapie weniger depressiv als vorher?“

„Isst die Durchschnittsfamilie in Norddeutschland mehr Fisch als die in Süddeutschland?“

„Erreichen Wasserkocher bei einer Kontrollmessung die angegebene Soll-Temperatur?“

„Gibt es einen Unterschied in der durchschnittlichen Anzahl Einbrüche in Häuser mit oder ohne Alarmanlage?“

GLIEDERUNG

T-Test für eine Stichprobe

T-Test für 2 abhängige Stichproben

T-Test für 2 unabhängige Stichproben

Übung

T-TEST FÜR EINE STICHPROBE

BEISPIEL

- „Die 72 Teilnehmer eines Segway Rennens haben eine Strecke von 55m im Mittel in 12,1 sec geschafft. Technisch möglich sei laut Hersteller eine Zeit von 11,8 sec. Die Teilnehmer möchten wissen, ob sich ihr Ergebnis statistisch von diesem Wert unterscheidet.“

- Hypothesen bilden:

→H0: MW = μ (12,1 = 11,8)

→H1: MW ≠ μ (12,1 ≠ 11,8)

- Signifikanzniveau festlegen: α=0,01

VORAUSSETZUNGEN

- Unabhängigkeit der Daten -> es darf keine Person doppelt gemessen werden
- Intervallskalenniveau
- $n>30$

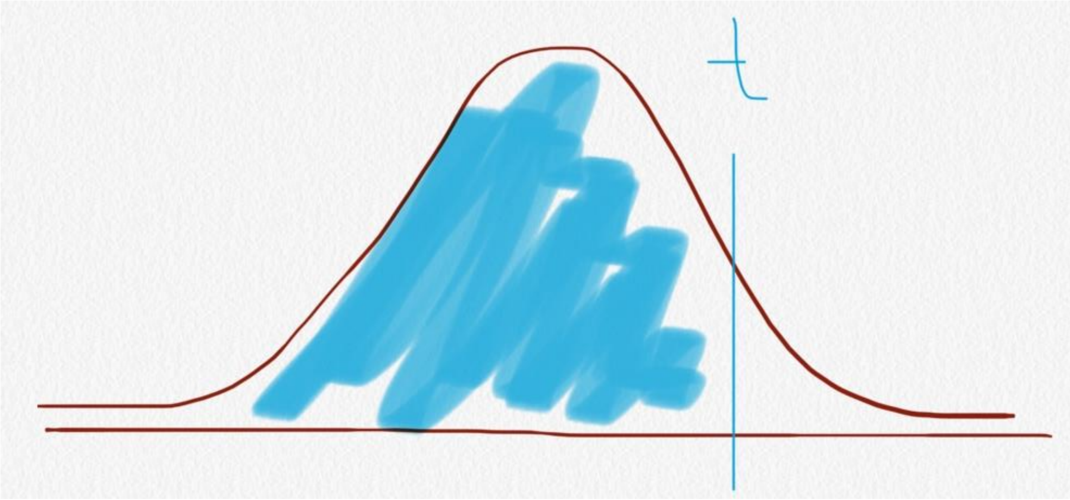
T-TEST FÜR EINE STICHPROBE

- Frage: Ist der numerische Unterschied zwischen den Werten statistisch bedeutsam oder könnte er auf Zufall beruhen?

→ Differenzbildung: Δ = MW - μ (Δ=12,1-11,8 = 0,3)

- Ziel: Prüfgröße t

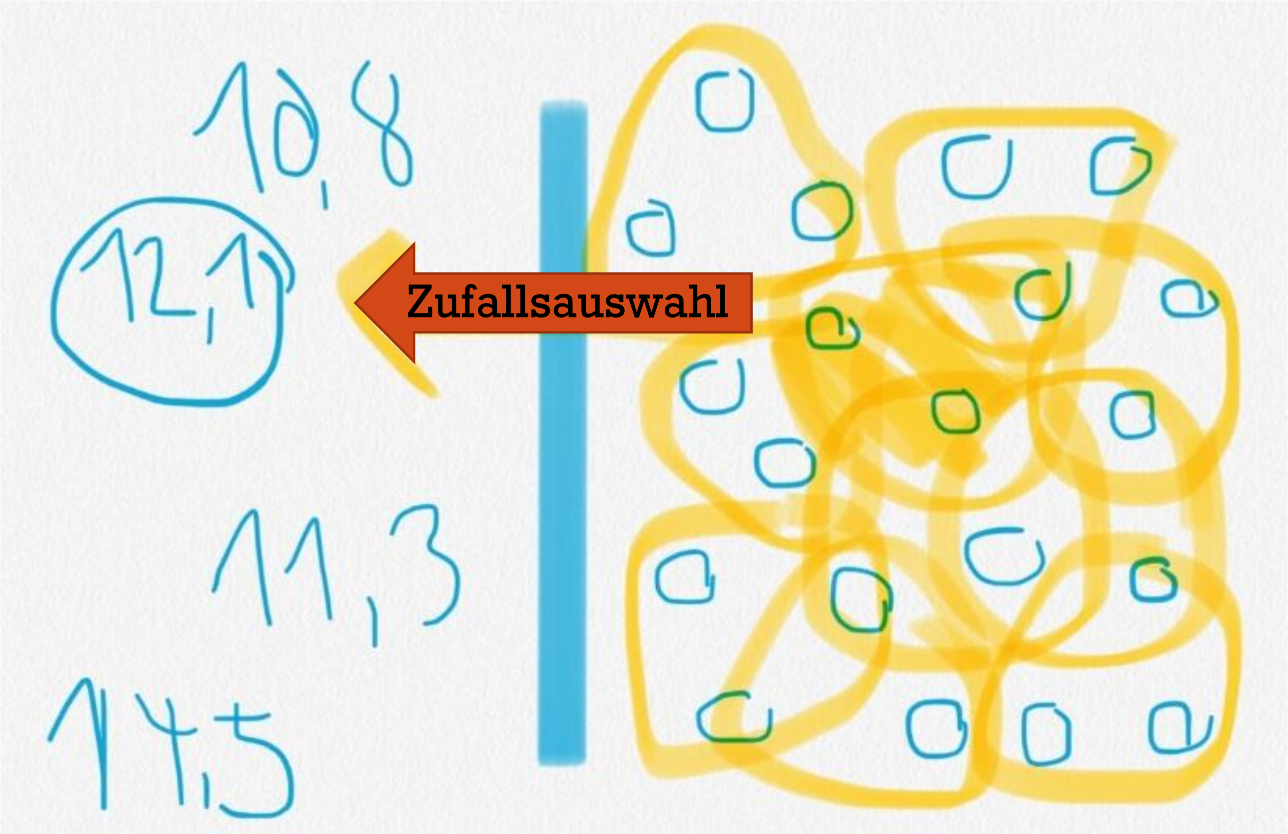
„Die 72 Teilnehmer eines Segway Rennens haben eine Strecke von 55m im Mittel in 12,1 sec geschafft. Technisch möglich sei laut Hersteller eine Zeit von 11,8 sec. Die Teilnehmer möchten wissen, ob sich ihr Ergebnis statistisch von diesem Wert unterscheidet.“



T-TEST FÜR EINE STICHPROBE

„Die 72 Teilnehmer eines Segway Rennens haben eine Strecke von 55m im Mittel in 12,1 sec geschafft. Technisch möglich sei laut Hersteller eine Zeit von 11,8 sec. Die Teilnehmer möchten wissen, ob sich ihr Ergebnis statistisch von diesem Wert unterscheidet.“

Stichprobe (ein MW)



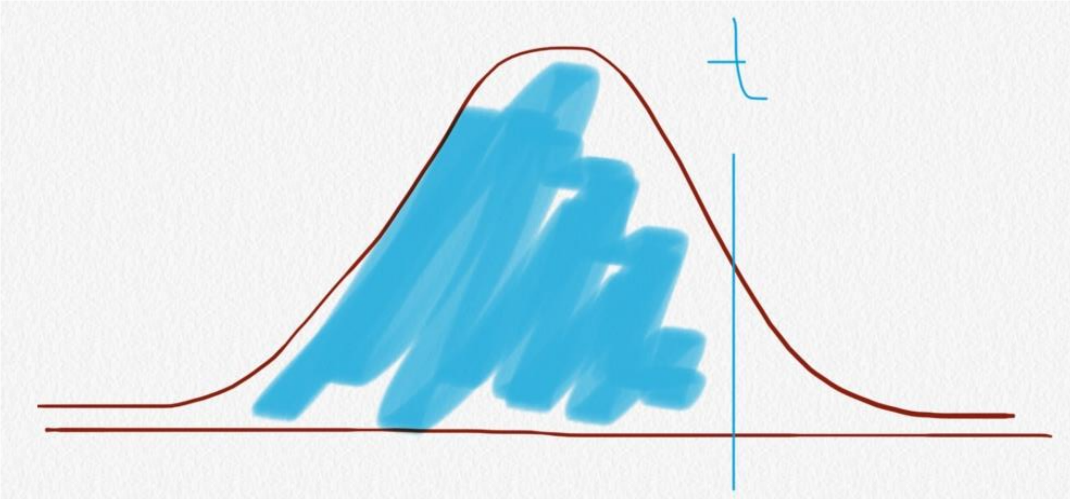
Population (alle MW)

T-TEST FÜR EINE STICHPROBE

- Frage: Ist der numerische Unterschied zwischen den Werten statistisch bedeutsam oder könnte er auf Zufall beruhen?

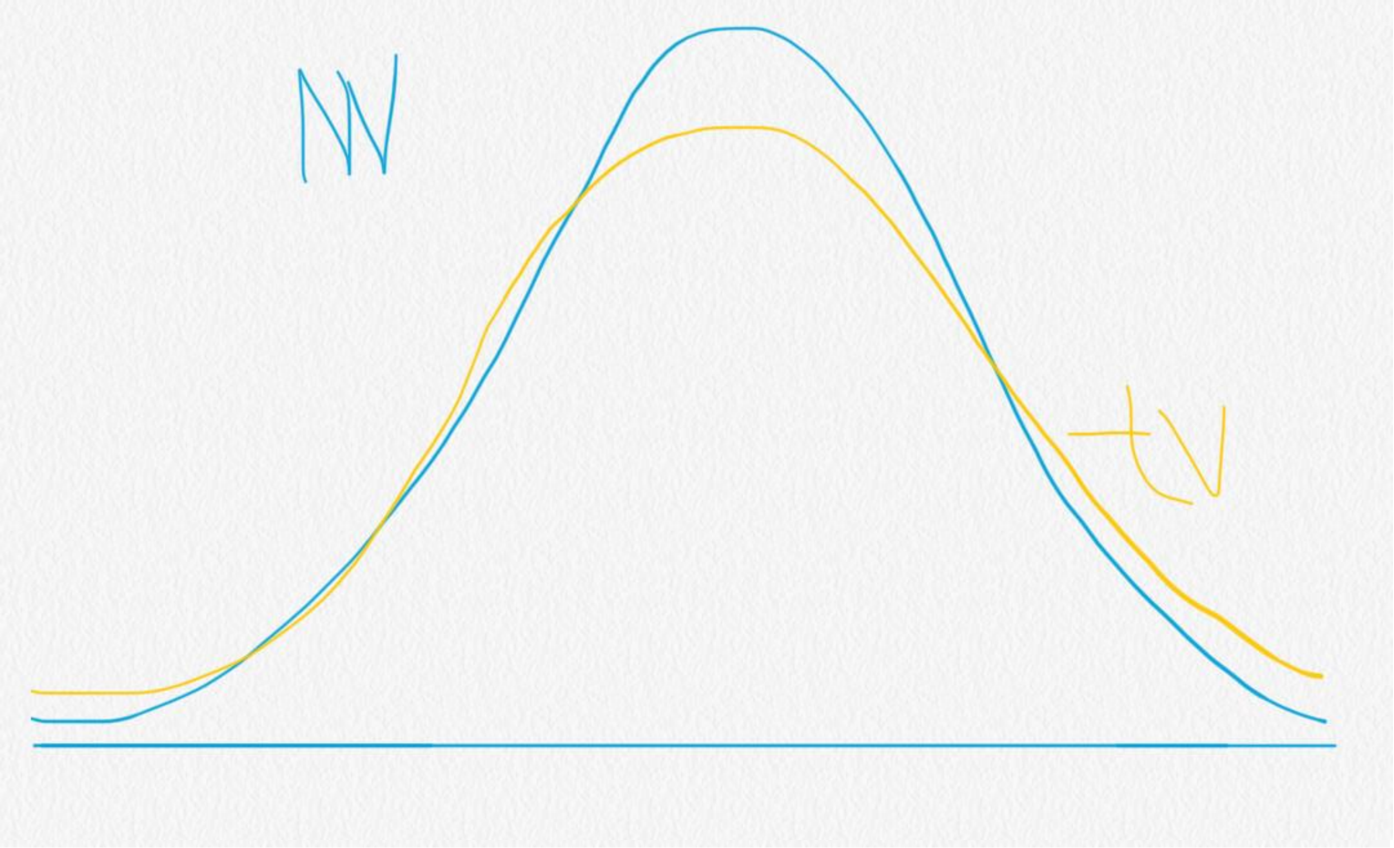
→ Differenzbildung: Δ = MW - μ (Δ=12,1-11,8 = 0,3)

- Ziel: Prüfgröße t



„Die 72 Teilnehmer eines Segway Rennens haben eine Strecke von 55m im Mittel in 12,1 sec geschafft. Technisch möglich sei laut Hersteller eine Zeit von 11,8 sec. Die Teilnehmer möchten wissen, ob sich ihr Ergebnis statistisch von diesem Wert unterscheidet.“

T-TEST FÜR EINE STICHPROBE



- T-Verteilung ist der Normalverteilung ähnlich
- T-Verteilung besitzt Freiheitsgrade
- Mit steigendem n wird die tV der NV ähnlicher

T-Test für eine Stichprobe

- Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- Geschätzte Populationsstandardabweichung

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot s$$

- Standardfehler (=SD der Mittelwerte)

$$SE = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \hat{\sigma}$$

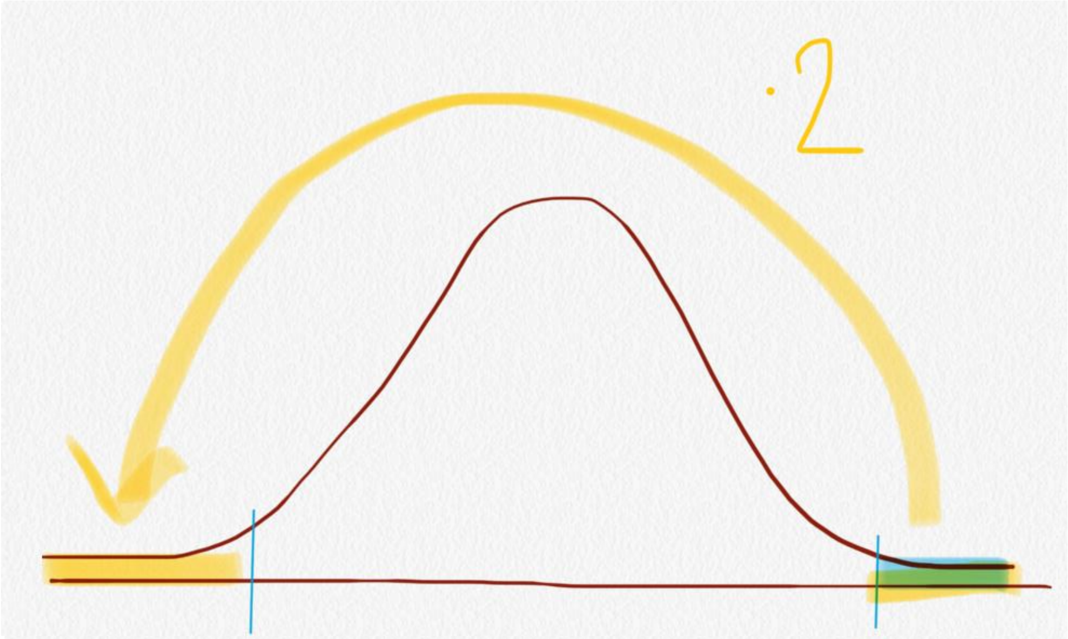
„Die 72 Teilnehmer eines Segway Rennens haben eine Strecke von 55m im Mittel in 12,1 sec geschafft. Technisch möglich sei laut Hersteller eine Zeit von 11,8 sec. Die Teilnehmer möchten wissen, ob sich ihr Ergebnis statistisch von diesem Wert unterscheidet.“

T-TEST FÜR EINE STICHPROBE

- Berechnung des t-Werts:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{SE}$$

  - Im Bsp: T=2,56



„Die 72 Teilnehmer eines Segway Rennens haben eine Strecke von 55m im Mittel in 12,1 sec geschafft. Technisch möglich sei laut Hersteller eine Zeit von 11,8 sec. Die Teilnehmer möchten wissen, ob sich ihr Ergebnis statistisch von diesem Wert unterscheidet.“

=2*T.VERT.RE(ABS(t);71)

=0,012 -> nicht signifikant

→ Wir verwerfen H1, behalten H0 bei

T-TEST FÜR 2 ABHÄNGIGE STICHPROBEN

T-TEST FÜR 2 ABHÄNGIGE STICHPROBEN

Voraussetzungen:

- Werte abhängig
- n1+n2 > 30 dann gilt Annahme normalverteilter Stichproben

oder: Gesamtheiten, aus denen Werte stammen sind ca. normalverteilt

- Daten sind intervallskaliert

T-TEST FÜR 2 ABHÄNGIGEN STICHPROBEN

Reduktion auf eine Datenreihe:

- Differenzen der paarweisen Werte bestimmen
- $x1 - x2 = \Delta_x$ → neue Datenreihe
- Wenn $\overline{\Delta}_x \neq 0$ → Zufall oder Effekt?

T-TEST FÜR 2 ABHÄNGIGEN STICHPROBEN

Hypothesen:

- ungerichtet: H0: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ H1: $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$
- gerichtet: H0: $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ H1: $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$

  H0: $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$ H1: $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$

„Die 72 Segway-Piloten fahren die Strecke noch einmal unter Alkoholeinfluss. Sie erreichen eine mittlere Zeit von 12,7 sec und fragen sich ob das langsamer ist als die 12,1 sec vorher.“

T-TEST FÜR 2 ABHÄNGIGEN STICHPROBEN

Vorgehen:

1. Hypothesen aufstellen
2. Paarweise Differenzen der Datenreihen bilden: Δ_x
3. Mittelwert der Differenzen berechnen: $\overline{\Delta}_x$
4. $\hat{\sigma}$ bestimmen: $\boxed{\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot s}$

   = geschätzte Standardabweichung der Population

„Die 72 Segway-Piloten fahren die Strecke noch einmal unter Alkoholeinfluss. Sie erreichen eine mittlere Zeit von 12,7 sec und fragen sich ob das langsamer ist als die 12,1 sec vorher.“

T-TEST FÜR 2 ABHÄNGIGEN STICHPROBEN

5. Standardfehler: $\text{SE} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
6. Prüfgröße t: $t = \frac{\bar{\Delta}_x - \mu}{SE}$ mit μ = 0
7. Freiheitsgrade: $df = \text{n-1}$
8. p-Wert bestimmen → wird das Signifikanzniveau unterschritten?

„Die 72 Segway-Piloten fahren die Strecke noch einmal unter Alkoholeinfluss. Sie erreichen eine mittlere Zeit von 12,7 sec und fragen sich ob das langsamer ist als die 12,1 sec vorher."

T-TEST FÜR 2 UNABHÄNGIGE STICHPROBEN

T-TEST FÜR 2 UNABHÄNGIGE STICHPROBEN

Voraussetzungen:

- Ziehungen der Stichproben sind unabhängig
- Intervallskalierte Variablen
- n1 + n2 > 50 ➔wenn verletzt, müssen Daten normalverteilt sein
- Streuungen der Populationen müssen gleich sein ➔ wenn verletzt, Welch-Test verwenden

➔Stichproben können unterschiedlich groß sein

T-Test für 2 unabhängige Stichproben

„Von den 72 Teilnehmer des Segway Rennens waren 42 weibliche und 30 männlich. Die Mädels erreichten als mittlere Streckenzeit 12,26 sec, die Jungs 11,9 sec.“

Hypothesen:

- $H_0: \overline{x_1} = \bar{x}_2$ (12,26 sec = 11,9 sec)
- $H_1: \overline{x_1} \neq \bar{x}_2$ (12,26 sec ≠ 11,9 sec)

Differenz:

$\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \quad \neq 0$ ➔Zufall oder Effekt?

Prüfgröße:

$$t = \frac{\Delta\bar{x}}{SE}$$

T-TEST FÜR 2 UNABHÄNGIGE STICHPROBEN

Bestimmung sigma pooled:

- Streuungen der beiden Stichproben sollte gleich sein, wenn H0 gilt
- Aber: bei Messung fällt Streuung durch Zufall immer unterschiedlich aus
- Lösung: Standardabweichungen werden „gemittelt“ ➔Pooling

$$\hat{\sigma}_{pooled} = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- Varianzschätzung wird mit ihrem Stichprobenumfang multipliziert

➔Streuung von größerer Stichprobe fällt mehr in Gewicht

T-TEST FÜR 2 UNABHÄNGIGE STICHPROBEN

Bestimmung Standardfehler:

$$SE = \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} * \hat{\sigma}_{pooled}$$

Bestimmung Freiheitsgrade:

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

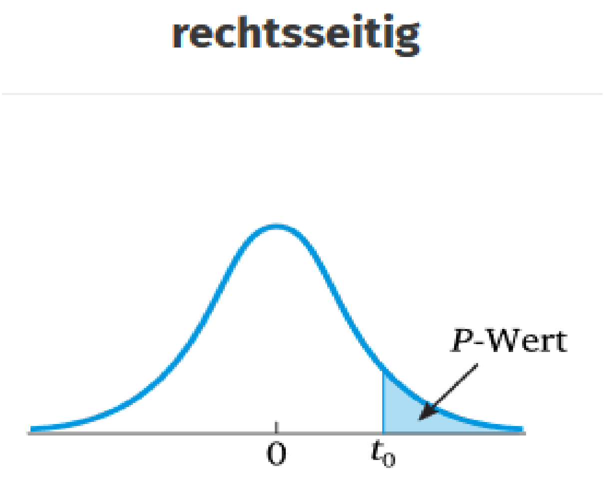
Bestimmung des t-Werts:

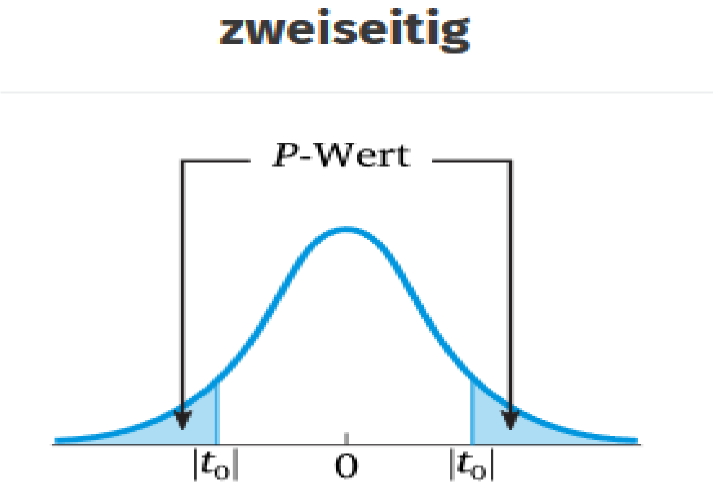
$$t = \frac{\Delta\bar{x}}{SE}$$

Bestimmung des p-Wertes und mit Alpha-Niveau vergleichen

BEEINFLUSSUNG VON T-TESTS:

- **Gerichtetheit der Hypothese:**
  - ➢ Ungerichtete Hypothesen werden später signifikant

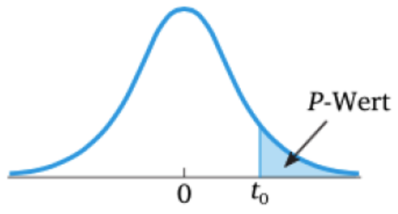




BEEINFLUSSUNG VON T-TESTS:

- **Stichprobengröße:**
  - Je größer n, desto kleiner der Standardfehler, desto größer der t-Wert, desto kleiner der p-Wert ➔wird schneller signifikant

$$SE = \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} * \hat{\sigma}_{pooled} \quad ➔ \quad t = \frac{\Delta \bar{x}}{SE} \quad ➔$$



  - Problem: mit genügend großer Stichprobe bekommt man alles signifikant
  - Lösung: Berechnung der Effektstärke (Cohen's d)

BEWERTUNG DER SIGNIFIKANZ MIT COHEN'S D

$$d = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}}$$

Interpretation Cohen's d:

$|d| >= 0,2$ → kleiner Effekt

$|d| >= 0,5$ → mittlerer Effekt

$|d| >= 0,8$ → großer Effekt

ABLAUF T-TESTS

Schritte
1. Hypothesen aufstellen
2. Signifikanzniveau festlegen
3. Mittelwert berechnen (bei abhängigen Daten Mittelwert der Differenzen)
4. Populationsstandardabweichung schätzen (sigma dach)
5. Standardfehler SE berechnen
6. t-Wert berechnen
7. Freiheitsgrade bestimmen
8. Signifikanz berechnen → F.VERT.RE (*2, wenn ungerichtet)
9. Entscheidung für/gegen H0
10. Berechnung Cohen‘s d

ÜBERSICHT

	Einstichproben t-Test	Abhängiger t-Test	Unabhängiger t-Test
	Weicht die gemessene Fahrzeit von der Angabe ab?	Gibt es einen Unterschied nach Alkoholkonsum?	Unterscheiden sich Männer und Frauen ?
$\hat{\sigma}$	$\sqrt{\frac{n}{n-1}} * s$	$\sqrt{\frac{n}{n-1}} * s$	$\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^1}{n_1 + n_2 - 2}}$
Standardfehler	$\frac{1}{\sqrt{n}} * \hat{\sigma}$	$\frac{1}{\sqrt{n}} * \hat{\sigma}$	$\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} * \hat{\sigma}_{pooled}$
df	$n - 1$	$n - 1$	$n_1 + n_2 - 2$
t	$\frac{\bar{x} - \mu}{SE}$	$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{SE}$	$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{SE}$
Cohen's d	$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert}{\hat{\sigma}}$	$\frac{\lvert\bar{x}_2 - \bar{x}_1\rvert}{\hat{\sigma}}$	$\frac{\lvert\bar{x}_2 - \bar{x}_1\rvert}{\hat{\sigma}_{pooled}}$

UND JETZT IHR! ;-)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

QUELLEN

Bortz, J. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler (7.Auflage).* Berlin; Heidelberg, Deutschland: Springer.

Vorlesung Primer: Inferenzstatistik 1.0. Malte Persike, Universität Mainz.

Abbildung: https://matheguru.com/stochastik/t-test.html (abgerufen am 12.11.2019)