

ANOVA für unabhängige Daten

ANOVA - was ist das?

- MW-Vergleich mehrerer Stichproben
- Erweiterung t-Test
- Analyse des Einflusses (mehrerer) UVn auf eine AV

Einfaktorielle ANOVA

- Nur ein Faktor (beliebig viele Stufen) → Nur ein Haupteffekt
 - Keine Interaktion
- Hypothesen:
 - H_0 : alle Mittelwerte sind gleich
 - H_1 : mind. zwei Gruppenmittelwerte sind verschieden

Lineares Modell

- Messwert besteht aus:
 1. Populationswert
 2. Messfehler
 3. Einfluss des Faktors A/B
 4. Interaktionseffekten

Voraussetzungen

1. Unabhängigkeit
2. Normalverteilung
3. Intervallskalierte AV
4. Kategoriale UV
5. Varianzhomogenität

Berechnung einer ANOVA

Ziel: Separate Aussagen über die Wirkung jedes einzelnen Treatments (A, B, ...) und der Interaktion aus zwei und mehr Treatments (AxB, ...)

Ansatz: Analyse der Unterschiede MWs der Stufen eines Faktors bzw. Zellmittelwerten
→ Varianzanalyse

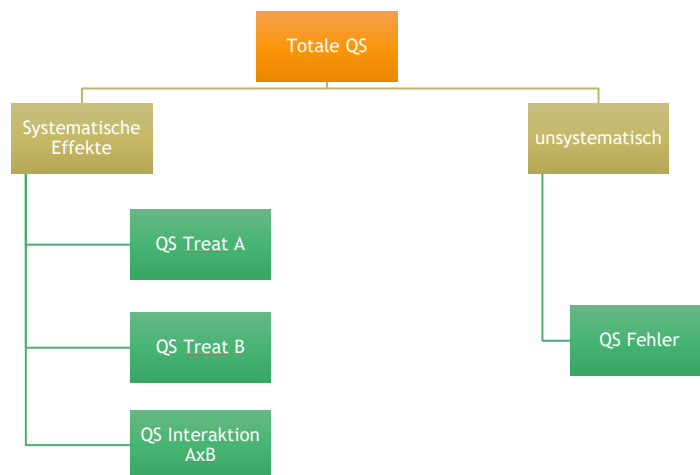
	QS	df	Var	F	Prob
A	QS_A	$i-1$	$\frac{QSA}{dfA}$	$\frac{\sigma^2_{Treat}}{\sigma^2_{Fehler}}$	
B	QS_B	$j-1$	$\frac{QSB}{dfB}$		
AxB	QS_{AxB}	$(i-1)*(j-1)$	$\frac{QSAxB}{dfAxB}$		
Fehler	QS_{Fehler}	$i*j*(n-1)$	$\frac{QS_{Fehler}}{df_{Fehler}}$		
Total	QS_{Total}	$n*i*j-1$	$\frac{QSTotal}{dfTotal}$		

Vorher: Berechnung des Mittelwertes aus allen Messwerten von allen Personen aus allen Stufen (sog. Grand Mean)

$$G = \frac{1}{n*i*j} * \sum A \sum B \sum AxB (x_{nij})$$

(auch: Summe der Stufen- / Zellmittelwerte)

Quadratsummenzerlegung



? Die ANOVA leistet das Auffinden von Unterschieden zwischen (Gruppen-)Mittelwerten durch einen Vergleich der Streuungen von Fehlern und Treatments!

Haupteffekte

= Streuung der Daten bedingt durch die Wirkung der Faktoren

- QSA = Summe der quadrierten Abweichungen aller Stufenmittelwerte $\bar{A}_1$ bis $\bar{A}_j$ zum Grand Mean
- QSB = Summe der quadrierten Abweichungen aller Stufenmittelwerte $\bar{B}_1$ bis $\bar{B}_i$ zum Grand Mean

Interaktionseffekt

= Spezifischer Effekt des einen Faktors auf die Messwerte innerhalb einer bestimmten Stufe des anderen Faktors

- **Keine Interaktion**
 - $\bar{A}_j \bar{B}_i_{\text{keinAxB}} = \bar{A}_j + \bar{B}_i - G$
- **Interaktion:** Summe der Differenzen aller Messwerte zu den jeweils zu erwartenden Zellmittelwerten ohne Interaktionseffekt
 - $\sum_A \sum_B \sum_{AxB} (x_{nij} - \bar{A}_j \bar{B}_i_{\text{keinAxB}})^2$

Fehlerstreuung e

= Summe der quadrierten Abweichungen der Messwerte innerhalb einer Zelle zum jeweiligen Zellmittelwert

Totale Quadratsumme

= Streuung aller Daten um den Mittelwert aus allen Messwerten von allen Personen aus allen Stufen

- $\sum_A \sum_B \sum_{AxB} (x_{nij} - \bar{G})^2$ bzw. $\sum_A \sum_B \sum_{AxB} (\mu + a_j + b_i + a_j b_i + e - \bar{G})^2$
- $QSA + QSB + QSAxB + QSFehler$

Populationsvarianzen

✓ **Problem:** Individuelle Messfehler der einzelnen Personen innerhalb einer Stufe werden herausgemittelt

✓ **Lösung:** Transformation der QS in Populationsvarianzen!
 → $\sigma^2 = \text{Quadratsumme} / \text{Freiheitsgrade}$

Freiheitsgrade

- df_{Total} = Freiheitsgrade der „Totalen Quadratsumme“
 - df_{TreatA} = Freiheitsgrade der Quadratsumme von Faktor A
 - df_{TreatB} = Freiheitsgrade der Quadratsumme von Faktor B
 - df_{TreatAxB} = Freiheitsgrade der Quadratsumme der Interaktion AxB
 - df_{Fehler} = Freiheitsgrade der „Fehlerquadratsumme“
- ? **WICHTIG:** Gleiche Anzahl Personen pro Zelle n

Prüfgröße F

Grundfrage: Ist die Streuung zwischen den Stufenmittelwerten eines Treatments hoch genug, damit statistisch behauptet werden kann, dass sie auf zufälligen Unterschieden (Messfehler) aufgrund der Stichprobenziehung beruhen können?

→ Beurteilung anhand einer **Prüfgröße F**

- Wird berechnet, indem man die Treatment- durch die Fehlerstreuung teilt.
- Sie gibt darüber Aufschluss, ob eine Diskrepanz zwischen Treatment- und Fehlerstreuung ausreicht um signifikant zu sein.
- F beträgt ungefähr 1, wenn kein systematischer Effekt des Treatments besteht.
- Alle von 1 abweichenden Werte für F folgen einer **F- Verteilung**

F- Verteilung

- Aus der F-Verteilung kann die Wahrscheinlichkeit $p(F)$ für das Auftreten beliebiger Prüfgrößen unter der Annahme, dass kein Effekt des Treatments (Treatmentstreuung = Fehlerstreuung) ermittelt werden.
- Ein zu unwahrscheinlicher Wert von F belegt systematische Unterschiede zwischen den Treatmentstufen

Wahrscheinlichkeit $p(F)$

Problem: Wie klein ist „zu unwahrscheinlich“?

- $\alpha \geq 0.05$ → statistisch nicht signifikant
- $\alpha < 0.05$ → statistisch signifikant
- $\alpha < 0.01$ → statistisch hochsignifikant

Varianzaufklärung η^2

nennt uns den Anteil der Gründe für das die Unterschiede zwischen den Messwerten der AV, die man aufgrund des jeweiligen Treatments erklären kann. Nicht-aufgeklärte Varianz zeigt den Anteil der Gründe, die wir nicht kennen.

Varianzaufklärung der Treatments

= Anteil an der Gesamtstreuung, für den das Treatment verantwortlich ist

- $\eta^2 = \frac{Q_{\text{Treat}}}{Q_{\text{Total}}}$ (Treatmentstreuung „geteilt durch“ totale Quadratsumme)

Nicht-aufgeklärte Varianz

= Anteil unbekannter Messfehler an der Gesamtvarianz

- $\eta^2_{\text{Fehler}} = \frac{Q_{\text{Fehler}}}{Q_{\text{Total}}}$ (Fehlerstreuung „geteilt durch“ totale Quadratsumme)

ANOVA Durchführung in Excel

1. Das Berechnen der Zell- und Stufenmittelwerte
 - a. Am besten in einer neuen Tabelle
 - b. Excel: =MITTELWERT(Daten)
2. Tabelle der erwarteten Unabhängigkeitswerte bilden
 - a. Excel: =StufenmittelwertA(Spalte festsetzen(ff.Sf))+
StufenmittelwertB(Zeile festsetzen(ff. Zf))-
Grand Mean(Zelle festsetzen(ff. Zzf))
3. Wichtige Faktoren berechnen:
 - a. n = Anzahl Personen pro Zelle
 - b. p = Stufenanzahl des Faktors A
 - c. q = Stufenanzahl des Faktors B
4. Quersummenbilden (Hilfstabellen) Excel:
 - a. $QS(A) = \text{StufenmittelwertA}(Zf.) - \text{Grand Mean}(Zzf.)$
 - b. $QS(B) = \text{StufenmittelwertB}(Zf.) - \text{Grand Mean}(Zzf.)$
 - c. $QS(A*B) = \text{Zellmittelwert}(Zf.) - \text{Zellmittelwert}(\text{aus Unabhängigkeitstabelle}(Zf.))$
 - d. $QS(\text{Fehler}) = \text{Messwerte} - \text{Zellenmittelwert}(Zf.)$
 - e. $QS(\text{Total}) = \text{Messwert} - \text{Grandmean}(Zzf.)$
5. Zuletzt aus den Hilfstabellen die Quersummenbilden
= Quadratsumme(der jeweiligen Tabelle) für alle 5 Hilfstabellen
6. Varianzen bilden
 - a. Von VarianzA bis VarianzTotal jeweils
= QS/df
7. Prüfgrößen berechnen F jeweils:
 - a. = $\text{Varianz}/\text{Fehlervarianz}(Zzf.)$
8. Signifikanzen berechnen p-Wert:
 - a. = $1 - \text{f.vert}(F; df; df(\text{fehler}); \text{wahr})$
9. Varianzaufklärung jeweils:
 - a. = $QS/QS(\text{total})$

